Problemi di Fisica

teoria cinetica dei gas

PROBLEMA

Calcolare la pressione esercitata dalle molecole di un gas perfetto sapendo che la velocità quadratica media è pari a 1840 m/s e che la densità è uguale a $8{,}92\cdot10^{-2}$ kg/m^3.

SOLUZIONE

La pressione esercitata dalle molecole del gas viene calcolata semplicemente attraverso l'applicazione diretta della seguente formula:

$$p=\frac{1}{3}\rho v_{qm}^2=\frac{1}{3}\cdot 8{,}92\cdot10^{-2}\cdot1840^2=1{,}01\cdot10^5\,\text{Pa}\approx 1\text{ atm}$$

PROBLEMA

Calcolare a quale temperatura le molecole di idrogeno hanno velocità quadratica media pari a $3{,}00\cdot10^3$ m/s.

SOLUZIONE

Sapendo che la velocità quadratica media è legata alla temperatura dalla relazione:

$$v_{qm}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{O_2}}}$$

si ricava che:

$$T=\frac{M_{O_2}\cdot v_{qm}^2}{3R}=\frac{2\cdot10^{-3}\cdot(3{,}00\cdot10^3)^2}{3\cdot8{,}31}=722\,\text{K}$$

dove $M_{O_2}=2\,\text{g/mol}=2\cdot10^{-3}$ kg/mol è la massa per mole dell'idrogeno.

PROBLEMA

Calcolare la velocità quadratica media delle molecole di un gas perfetto che si trova a pressione p_0=1,00 atm e a temperatura T=500 K, sapendo che alla stessa pressione e a temperatura T_0=273 K la densità del gas è ρ_0=1,25 kg/m^3.

SOLUZIONE

La velocità quadratica media è data da:

$$v_{qm}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Per la prima legge di Gay-Lussac, mantenendo costante la pressione del gas, il suo volume varia in maniera direttamente proporzionale alla temperatura assoluta. Indicando con V_0 il volume alla temperatura T_0 e con V quello alla temperatura T, abbiamo:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

Poiché, per una fissata massa di gas la densità è:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

otteniamo che:

$$\frac{\frac{m}{\rho}}{\frac{m}{\rho_0}} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} = 1{,}25 \cdot \frac{273}{500} = 0{,}68 \ \text{kg/m}^3 \quad (1)$$

Infine, sostituendo nella (1) i relativi valori si ha:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5}{0{,}68}} = 669 \text{m/s}$$

PROBLEMA

A quale temperatura la velocità quadratica media delle molecole di anidride carbonica (CO_2) è uguale alla velocità di un aereo supersonico che viaggia a 1200 km/h?

SOLUZIONE

Sapendo che la velocità quadratica media v_{qm} è data da:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

la temperatura la ricaviamo come formula inversa:

$$T = \frac{v_{qm}^2 \cdot M}{3R} \qquad (1)$$

La massa della molecola di CO_2 è 44 u, per cui la massa per mole della sostanza è:

$$M = 44 \text{ g/mol} = 4{,}40 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$$

mentre la velocità quadratica media delle molecole è: V_{qm}=1200 km/h=333 m/s
Sostituendo questi dati nella (1) si ha:

$$T = \frac{333^2 \cdot 4{,}40 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 8{,}31} = 196 \text{K}$$

PROBLEMA

L'aria è principalmente una miscela di azoto N_2 (massa molecolare: 28.0 u) e di ossigeno O_2 (massa molecolare: 32.0 u). Calcolare la velocità quadratica media dell'azoto e dell'ossigeno quando la temperatura dell'aria è T = 293 K.

SOLUZIONE

Poiché la massa per mole dell'azoto è:

$$M_{N_2} = 28{,}0\,\mathrm{g/mol} = 28{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

otteniamo la velocità quadratica media delle molecole dell'azoto applicando la seguente formula:

$$v_{N_2 qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28{,}0 \cdot 10^{-3}}} = 511\,\mathrm{m/s}$$

Invece, la massa per mole dell'ossigeno è:

$$M_{O_2} = 32{,}0\,\mathrm{g/mol} = 32{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

per cui la velocità quadratica media delle molecole dell'ossigeno è:

$$v_{N_2 qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{32{,}0 \cdot 10^{-3}}} = 478\,\mathrm{m/s}$$

Per confronto, la velocità del suono alla temperatura di 293 K è 343 m/s, dello stesso ordine di grandezza delle velocità di agitazione termica delle molecole.
Quando nell'aria si propaga un suono, tuttavia, le molecole non si spostano per lunghi tratti nella direzione dell'onda sonora; ciò che viaggia è l'energia associata all'onda.

PROBLEMA

Se si aumenta da 27,0 °C a 57,0 °C la temperatura di una mole di idrogeno, calcolare la variazione di energia cinetica di traslazione, espressa in cal/mol, delle molecole

SOLUZIONE

L'energia cinetica media delle molecole in funzione della temperatura assoluta T è espressa da:

$$\overline{E}_C = \frac{3}{2} nRT$$

per cui, la variazione di energia cinetica è:

$$\Delta\overline{E}_C = \overline{E}_{2C} - \overline{E}_{1C} = \frac{3}{2} nR\left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}99 \cdot (330 - 300) = 89{,}6\,\mathrm{cal/mol}$$

dove R = 1,99 cal/mol·K

PROBLEMA

Mediante una trasformazione a volume costante un gas perfetto monoatomico, inizialmente alla temperatura T_1 = 300 K, viene portato dalla pressione p_1 = 9,00 atm alla pressione p_2 = 10,0 atm.

- Calcolare la variazione di energia cinetica media per molecola che si ha in seguito alla trasformazione.

SOLUZIONE

In una trasformazione a volume costante, la pressione e la temperatura assoluta di un gas perfetto sono direttamente proporzionali (seconda legge di Gay-Lussac), per cui la temperatura T_2 che corrisponde alla pressione p_2 è:

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} = 300 \cdot \frac{10,0}{9,00} = 333K$$

Essendo il gas monoatomico, l'energia cinetica media delle sue molecole in funzione della temperatura assoluta T è espressa da:

$$\overline{E}_C = \frac{3}{2}k_B T$$

per cui, la variazione di energia cinetica nella trasformazione è:

$$\Delta\overline{E}_C = \overline{E}_{2C} - \overline{E}_{1C} = \frac{3}{2}k_B(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (333 - 300) = 6,83 \cdot 10^{-22}\ J$$

PROBLEMA

Un serbatoio contiene 2,00 moli. Facendo l'ipotesi che l'elio si comporti come un gas perfetto, trovare l'energia cinetica media totale delle molecole del gas e l'energia cinetica media per molecola. Usando il fatto che la massa per mole dell'elio è $4,00 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, calcolare la velocità quadratica media degli atomi a 20,0 °C.

SOLUZIONE

L'energia cinetica totale del gas, indicando con *m* la massa di una molecola, è:

$$\overline{E}_C^{tot} = \frac{1}{2}mv_{qm}^2 \qquad (1)$$

dove

$$m = nM_{He} = 2 \cdot 4 = 8g = 8 \cdot 10^{-3}\ kg/mol \qquad M_{He} = 4,00 = g/mol = 4,00 \cdot 10^{-3} k/mol$$

La velocità quadratica media è data da:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{4{,}00 \cdot 10^{-3}}} = 1351\,m/s$$

Sostituendo nella (1) i dati ricavati e quelli del problema, otteniamo:

$$\overline{E}_C^{tot} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 1351^2 = 7300J$$

L'energia cinetica media per molecola, invece, la calcoliamo come:

$$\frac{\overline{E}_C^{tot}}{N} = \frac{7300}{12 \cdot 10^{23}} = 608 \cdot 10^{-23}\ J$$

dove: $N = n{\cdot}N_A = 2{,}00{\cdot}6{,}02{\cdot}10^{23} = 12{\cdot}10^{23}$ molecole

PROBLEMA

Due recipienti contengono lo stesso numero N di molecole di un gas perfetto monoatomico, le cui velocità quadratiche medie in condizioni di equilibrio sono rispettivamente V_{1qm} = 400 m/s e V_{2qm} = 300 m/s. Se si pongono i due recipienti in comunicazione, supponendo che non ci siano scambi di energia con l'ambiente, quale sarà la velocità quadratica media all'equilibrio?

SOLUZIONE

Prima di mettere in comunicazione i due recipienti, l'energia cinetica totale dei due gas, indicando con *m* la massa di una molecola, è:

$$\overline{E}_C^{tot} = N \cdot \frac{1}{2} m v_{1qm}^2 + N \frac{1}{2} m v_{2qm}^2 \qquad (1)$$

In un gas perfetto le interazioni fra molecole, alle quali sarebbe associata un'energia potenziale, sono assenti. Perciò l'energia meccanica totale delle molecole coincide con l'energia cinetica totale.
Poiché i gas contenuti nei due recipienti costituiscono, nel loro complesso, un sistema isolato, l'energia $\overline{E}_C^{tot}$ si conserva. Dopo che i recipienti sono stati messi in comunicazione, indicando con V_{qm} l'energia quadratica media delle molecole all'equilibrio, abbiamo:

$$\overline{E}_C^{tot} = 2N \frac{1}{2} m v_{qm}^2 \qquad (2)$$

Dal confronto delle relazioni (1) e (2) otteniamo la velocità quadratica media all'equilibrio:

$$\frac{1}{2} mN \cdot \left(v_{1qm}^2 + v_{2qm}^2\right) = 2N \frac{1}{2} m v_{qm}^2 \Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\frac{v_{1qm}^2 + v_{2qm}^2}{2}} = \sqrt{\frac{400^2 + 300^2}{2}} = 354\,m/s$$

PROBLEMA

A quale temperatura la velocità quadratica media delle molecole di azoto è uguale a quella posseduta dalle molecole di idrogeno a 27 °C?

SOLUZIONE

L'espressione della velocità quadratica media per le molecole di azoto alla temperatura T* è:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT*}{M_{N_2}}}$$

La stessa relazione per le molecole di idrogeno è:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}}$$

Poiché il problema chiede di determinare a quale temperatura T* le molecole di azoto possiedono la stessa v_{qm} dell'idrogeno, dobbiamo uguagliare le velocità quadratiche medie dei due gas:

$$\sqrt{\frac{3RT*}{M_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}}$$

Da questa uguaglianza ricaviamo la temperatura T*:

$$\frac{T*}{M_{N_2}} = \frac{T}{M_{H_2}} \Rightarrow T* = T \cdot \frac{M_{N_2}}{M_{H_2}} = 300 \cdot \frac{28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 4200\,K$$

sapendo che la massa molecolare dell'azoto e dell'idrogeno sono:

$$M_{N_2} = 28g/mol = 40 \cdot 10^{-3}\ kg/mol \qquad M_{H_2} = 2g/mol = 28 \cdot 10^{-3}\ kg/mol$$

PROBLEMA

Qual è la velocità quadratica media v_{qm} delle molecole di argon (Ar), quando il gas si trova in uno stato termodinamico a temperatura T = 273 K? A quale temperatura T* si trova una certa quantità di azoto (N_2) le cui molecole possiedono la stessa velocità v_{qm} dell'argon a temperatura T?

SOLUZIONE

- **MODELLO FISICO**

Poiché le molecole dei due gas hanno la stessa velocità quadratica media, la diversa energia cinetica media è dovuta alle differenti masse delle molecole. Poiché la temperatura dei gas è proporzionale alla loro energia cinetica media, ci aspettiamo, nelle condizioni del problema, che la temperatura del gas costituito da molecole più pesanti sia superiore a quella del gas più leggero.

- **LEGGI ED EQUAZIONI**

L'energia cinetica totale di una massa *m* di gas perfetto è legata alla temperatura *T* mediante la relazione:

$$\overline{E}_C = \frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} nRT$$

La massa m del gas, riferita al numero di moli e alla massa molecolare è:

$$m = nM$$

- **SOLUZIONE ALGEBRICA**

Sostituendo l'espressione per la massa in quella dell'energia cinetica, possiamo ricavare il valore della velocità delle molecole di argon:

$$v_{qm}^2 = \frac{3nRT}{m} = \frac{3nRT}{nM_{Ar}} = \frac{3RT}{M_{Ar}} \Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{Ar}}}$$

Scrivendo la stessa relazione per l'azoto di massa molecolare M_{N_2} e alla temperatura T* si ha:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{N_2}}}$$

Poiché il problema chiede di determinare la temperatura T* alla quale si trova una certa quantità di azoto (N_2) le cui molecole possiedono la stessa velocità v_{qm} dell'argon a temperatura T, dobbiamo uguagliare le velocità quadratiche medie dei due gas:

$$\sqrt{\frac{3RT}{M_{Ar}}} = \sqrt{\frac{3RT^*}{M_{N_2}}}$$

Da questa uguaglianza ricaviamo la temperatura T*:

$$\frac{T}{M_{Ar}} = \frac{T^*}{M_{N_2}} \Rightarrow T^* = T \cdot \frac{M_{N_2}}{M_{Ar}}$$

- **SOLUZIONE NUMERICA**

Sapendo che la massa molecolare dell'argon e dell'azoto sono:

$$M_{Ar} = 40 g/mol = 40 \cdot 10^{-3}\ kg/mol \qquad M_{N_2} = 28 g/mol = 28 \cdot 10^{-3}\ kg/mol$$

ricaviamo che:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{40 \cdot 10^{-3}}} = 413 m/s \qquad T^* = 273 \cdot \frac{28 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} = 191 K$$

PROBLEMA

Calcolare il cammino libero medio delle molecole dell'aria atmosferica al livello del mare (p_0 = 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa) e a una temperatura di 27,0 °C, assumendo come raggio molecolare r = $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ m. Come varia il cammino libero medio con la temperatura?

SOLUZIONE

Il cammino libero medio, ossia la distanza media che una molecola percorre con moto rettilineo uniforme fra due urti successivi, è dato da:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}nS} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n} \qquad (1)$$

dove:

1. $n = \dfrac{N}{V}$ rappresenta il numero di molecole per unità di volume (da non confondere con il numero di moli)
2. $S = 4\pi r^2$ la sezione d'urto, ossia la superficie di ciascuna sfera

Per calcolare n, utilizziamo l'equazione di stato dei gas perfetti. Se N è il numero totale di molecole, si ha:

$$p_0 V = N k_B T \Rightarrow N = \frac{p_0 V}{k_B T} \qquad (2)$$

per cui:

$$n = \frac{\frac{p_0 V}{k_B T}}{V} = \frac{p_0}{k_B T} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 2{,}45 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$$

Sostituendo il valore di n nella (1) insieme ai dati del problema, otteniamo:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi \cdot (1{,}00 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 2{,}45 \cdot 10^{25}} = 2{,}30 \cdot 10^{-7}\text{m}$$

Poiché il numero n di molecole per unità di volume, in base alla (2), è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta T, il cammino libero medio, in base alla (1), essendo inversamente proporzionale a n, sarà direttamente proporzionale a T.

PROBLEMA

Una certa quantità di elio occupa alla temperatura T = 330 K e alla pressione p = 1 atm, un volume V = 1,00 litri.

Calcolare:

a. il numero delle molecole
b. la velocità quadratica media
c. la velocità più probabile e la velocità media di una molecola

SOLUZIONE

a. Dal principio di Avogadro sappiamo che il volume di una mole di gas qualsiasi in condizioni normali, cioè alla temperatura di 0 °C e alla pressione di 1 atm , è pari a 22,4 litri (volume molare). Mentre, il volume V_0 che l'elio avrebbe se venisse portato alla temperatura di 0 °C (273 K), mantenendo costante la pressione, è:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow V_0 = V \cdot \frac{T_0}{T} = 1{,}00 \cdot \frac{273}{330} = 0{,}827\,\text{litri}$$

Pertanto, il numero di moli che occupano il volume V_0 è:

$$n = \frac{V_0}{V_{mol}} = \frac{0{,}827}{22{,}4} = 0{,}0369\,\text{mol}$$

e quindi il numero di molecole è:

$$N = nN_A = 0{,}0369 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 2{,}22 \cdot 10^{22} \text{ molecole}$$

b. Osservando che la massa atomica dell'elio è 4,00 u e, quindi, la sua massa per mole è M = 4,00 g/mol = $4{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, la velocità quadratica media è:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 330}{4{,}00 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}43 \cdot 10^3\,\text{m/s}$$

c. Dalla distribuzione di Maxwell si possono ricavare, alla temperatura T, le seguenti espressioni per la velocità più probabile e la velocità media di una molecola:

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}}v_{qm} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}v_{qm}$$

Sostituendo alla v_{qm} il valore calcolato al punto b), si ha:

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^3 = 1{,}17 \cdot 10^3\,\text{m/s} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^3 = 1{,}32 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

PROBLEMA

Il metano CH_4 (M = 16 g/mol) in condizioni normali contiene $2{,}70 \cdot 10^{19}$ molecole per cm^3. Assumendo come diametro molecolare $2{,}74 \cdot 10^{-10}$ m, calcolare:

a. la velocità quadratica media
b. il cammino libero medio
c. il numero di urti al secondo
d. l'intervallo di tempo medio tra due urti successivi

SOLUZIONE

a. Quando parliamo di condizioni normali ci riferiamo alla pressione p_0 = 1 atm e alla temperatura t_0 = 0 °C. Pertanto la velocità quadratica media delle molecole di metano in queste condizioni è:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{16 \cdot 10^{-3}}} = 652\,m/s$$

b. Il cammino libero medio, ossia la distanza media che una molecola percorre con moto rettilineo uniforme fra due urti successivi, è dato da:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}nS} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2{,}70 \cdot 10^{25} \cdot 23{,}6 \cdot 10^{-20}} = 0{,}0111 \cdot 10^{-5}m = 1{,}11 \cdot 10^{-5}cm \qquad (1)$$

dove:
$N = 2{,}70 \cdot 10^{19}$ molecole/cm^3 = $2{,}70 \cdot 10^{25}$ molecole/m^3 rappresenta il numero di molecole per unità di volume (da non confondere con il numero di moli)
$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{2{,}74}{2} \cdot 10^{-10}\right)^2 = 23{,}6 \cdot 10^{-20}m^2$ rappresenta la sezione d'urto, ossia la superficie di ciascuna sfera

c. Il numero di urti al secondo, ossia la frequenza di collisione, si calcola come:

$$f = \frac{v_{qm}}{\bar{\lambda}} = \frac{652}{0{,}0111 \cdot 10^{-5}} = 5{,}88 \cdot 10^{9} \text{ urti/secondo}$$

d. Poiché tra due urti successivi le molecole si muovono di moto rettilineo uniforme, dalla cinematica ricaviamo che l'intervallo medio è dato da:

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}}{v_{qm}} = \frac{1}{f} = \frac{1}{5{,}88 \cdot 10^{9}} = 0{,}170 \cdot 10^{-9}s$$

PROBLEMA

Per quale valore del rapporto T_2/T_1 la velocità più probabile delle molecole di un gas perfetto, a una temperatura di equilibrio T_2, coincide con la velocità quadratica media delle molecole dello stesso gas, alla temperatura di equilibrio T_1?

SOLUZIONE

Dalla distribuzione di Maxwell si ricava, alla temperatura di equilibrio T_2, la seguente espressione per la velocità più probabile:

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T_2}{m}}$$

Per lo stesso gas, alla temperatura di equilibrio T_1, la velocità quadratica media è data da:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Uguagliando le due relazioni siamo in grado di calcolare il rapporto T_2/T_1 in virtù del quale la velocità più probabile e la velocità quadratica media di un gas perfetto coincidono:

$$\sqrt{\frac{2k_B T_2}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T_1}{m}} \Rightarrow 2T_2 = 3T_1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

PROBLEMA

Calcolare il volume occupato da 3,00 g di gas perfetto mantenuto a pressione normale, sapendo che la velocità quadratica media delle molecole è pari a 500 m/s

SOLUZIONE

Dai dati del problema si capisce che il volume va calcolato partendo dalla definizione di densità:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

per cui dobbiamo puntare l'attenzione sul calcolo della densità del gas.

La densità è legata alla pressione dalla seguente relazione:

$$p = \frac{1}{3}\rho v_{qm}^2 \qquad \text{da cui:} \qquad \rho = \frac{3p}{v_{qm}^2} = \frac{3 \cdot 1.013 \cdot 10^5}{500^2} = 1{,}2\,\text{kg/m}^3$$

dove p = 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa (gas in condizioni normali).

In definitiva:

$$V = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = 2{,}5\ \text{dm}^3 = 2{,}5\ \text{litri}$$

PROBLEMA

Una certa quantità di gas occupa un volume V = 10 litri alla pressione di 1,0 atm. Sapendo che la velocità più probabile è 500 m/s, calcolare la massa del gas contenuto nel recipiente.

SOLUZIONE

Calcoliamo la massa del gas dalla definizione di densità:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$$

La densità è legata alla pressione dalla seguente relazione:

$$p = \frac{1}{3}\rho v_{qm}^2 \qquad \text{da cui:} \qquad \rho = \frac{3p}{v_{qm}^2}$$

Però ci manca la velocità quadratica media, che è legata alla velocità più probabile, che conosciamo come dato del problema, dalla seguente relazione:

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}}v_{qm} \Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 500 = 612\,m/s$$

per cui:

$$\rho = \frac{3 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5}{612^2} = 0{,}81\,kg/m^3$$

Pertanto, la massa del gas è:

$$m = 0{,}81 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,kg = 8{,}1\ g$$

PROBLEMA

Un recipiente avente un volume di 2,00 m^3 contiene alla pressione di 1,00 atm e alla temperatura di 27,0 °C delle molecole di azoto N_2 (M = 28,0 g/mol). Considerando l'azoto gas perfetto, calcolare l'energia cinetica totale delle molecole.

SOLUZIONE

L'energia cinetica totale di n moli di gas biatomico è data da:

$$E_C^{tot} = \frac{5}{2}nRT \qquad \text{dove } n = \frac{m}{M}$$

Però ci manca la massa del gas, che è legata alla densità dalla relazione:

$$m = \rho V$$

A sua volta, la densità la ricaviamo dalla relazione della pressione:

$$p = \frac{1}{3}\rho v_{qm}^2 \Rightarrow \rho = \frac{3p}{v_{qm}^2} = \frac{3 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5}{517^2} = 1{,}14\,kg/m^3$$

dove: $v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} = 517\,m/s$

Nota la densità, siamo in grado di calcolare massa e numero di moli del gas:

$$m = 1{,}14 \cdot 2 = 2{,}28 \ \text{kg} \qquad n = \frac{2{,}28 \cdot 10^3}{28} = 81{,}4 \, \text{mol}$$

Infine, abbiamo tutti i dati per calcolare l'energia cinetica totale delle molecole di azoto:

$$E_C^{tot} = \frac{5}{2} \cdot 81{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 5{,}07 \cdot 10^5 \ \text{J}$$